## *Jednačine sistema*

Za svaki štap j veze između generalisanih sila i generalisanih pomjeranja na krajevima štapa mogu da se prikažu sljedećim izrazom:

$$R_j^* = k_j^* \, q_j^* - Q_j^*$$

**$R^*_j$ vektor generalisanih sila štapa j u globalnom koordinatnom sistemu**

**$q^*_j$ vektor generalisanih pomjeranja štapa j u globalnom koordinatnom sistemu**

**$k^*_j$ matrica krutosti štapa j u globalnom koordinatnom sistemu**

**$Q^*_j$ vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja štapa j u globalnom koordinatnom sistemu koji odgovara zadatim spoljašnjim uticajima duž ose štapa**

**M ukupan broj štapova sistema**

Ako se ove jednačine napišu za sve štapove sistema dobija se sljedeća matrična jednačina:

$$\overline{R}^* = \overline{k}^* \, \overline{q}^* - \overline{Q}^*$$

$$\overline{R}^* = \begin{bmatrix} R_1^* \\ \cdots \\ R_j^* \\ \cdots \\ R_M^* \end{bmatrix} \qquad \overline{k}^* = \begin{bmatrix} k_1^* & & & & \\ & \cdots & & & \\ & & k_j^* & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & k_M^* \end{bmatrix}$$

Pri ispisivanju ovih jednačina **nije vođeno računa o vezama štapova**, **jednačine su ispisane redom**, **onako kako su u sistemu označeni štapovi**, pod pretpostavkom da su štapovi međusobom nezavisni, odnosno, **nepovezani u čvorovima sistema**.

Zbog toga se kvazidijagonalna matrica krutosti sistema

$\overline{q}\,*$ **vektor generalisanih pomjeranja sistema nepovezanih štapova u globalnom koordinatnom sistemu**

$\overline{k}\,*$ **matrica krutosti sistema nepovezanih štapova u globalnom koordinatnom sistemu**

$\overline{Q}\,*$ **vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja sistema nepovezanih elemanata u globalnom koordinatnom sistemu**

$\overline{R}\,*$ **vektor generalisanih sila sistema nepovezanih štapova u globalnom koordinatnom sistemu**

**Štapovi**, u sistemu štapova, **su međusobno povezani**, tako da su **pomjeranja i obrtanja u nekom čvoru ista za sve štapove koje se u tom čvoru vezuju**, to znači da **štapovi u sistemu štapova moraju da zadovolje:** ***uslove kompatibilnosti pomjeranja u čvorovima sistema*****.**

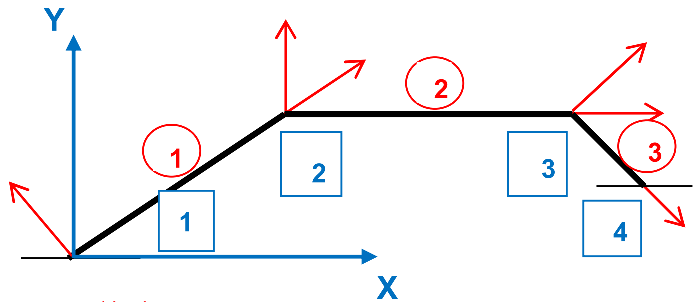
Ako sa q* označimo **vektor generalisanih pomjeranja čvorova sistema štapova u globalnom koordinatnom sistemu**, očigledno je da će se između ovog vektora i vektora $\overline{q}\,*$ **čije su komponente generalisanih pomjeranja na krajevima** pojedinih štapova sistema postojati zavisnost u sljedećem obliku:

$$\overline{q}* = J\ q*$$

**Matrica J** koja **uspostavlja neposrednu zavisnost između vektora** $\bar{q}^*$ **i q*** je **pravougaona matrica** kod koje je broj vrsta jednak zbiru broja stepeni slobode štapova sistema, a broj kolona jednak je broju stepeni slobode čvorova sistema.

Pošto se **krajevi štapa poklapaju sa čvorovima sistema** i pošto se komponente vektora $\bar{q}^*$ i q* **mjere u odnosu na globalni koordinatni sistem**, **elementi matrice J su jedinice ili nule.**

**PRIMJER:**




$\bar{q}^*$ vektor ima **3x2=6 članova** (tri štapa sa dva kraja)

**q*** vektor ima **4 člana** jer sistem ima **4 čvora**.

Za primjer dat na slici **veze između vektora pomjeranja nepovezanih i povezanih štapova su**:

$$\begin{bmatrix} q_i^{*1} \\ q_k^{*1} \\ q_i^{*2} \\ q_k^{*2} \\ q_i^{*3} \\ q_k^{*3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & I & & \\ & & I & \\ & & I & \\ & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \end{bmatrix}$$

**$q^{*m}_i$ (m=1,2,3)** **generalisana pomjeranja krajeva štapa**

**$q^*_i$ (i=1,2,3,4)** **generalisana pomjeranja čvorova sistema**

**I** **jedinična matrica trećeg reda (čvor ima tri stepena slobode)**

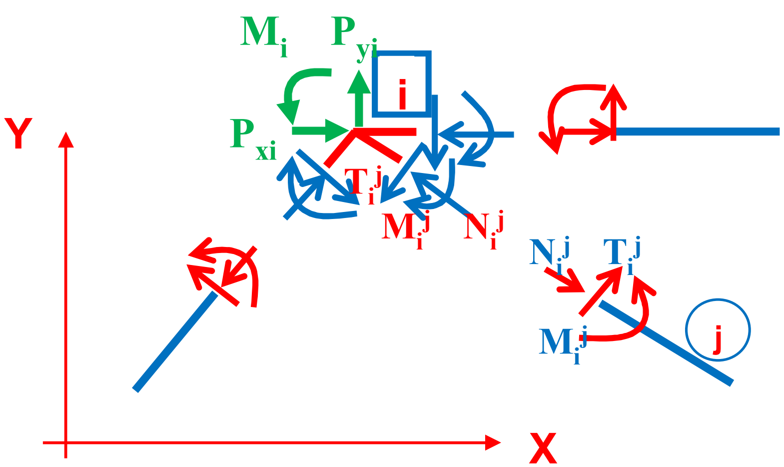
**J** **matrica koja definiše veze štapova u čvorovima sistema**

Ova matrica se ***naziva kinematička matrica*** *ili* ***matrica veze štapova*** *ili* ***matrica kompatibilnosti sistema.***

Pored **uslova kompatibilnosti u čvorovima sistema** moraju da budu zadovoljeni i ***uslovi ravnoteže***.

Posmatraćemo **čvor i koji je izdvojen iz sistema štapova**.

U čvoru djeluju **sile veze (generalisane sile na krajevima štapova)** i **spoljašnje sile (koncentrisane sile i momenti)** koje djeluju neposredno u čvoru i:




$$P_i^* = \begin{bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ M_i \end{bmatrix}$$

$P^*_i$ – vektor spoljašnjih sila

**Komponente vektora spoljašnjih sila zadaju se u odnosu na globalni koordinatni sistem** tako da se izbjegava transformacija.

**Uslovi ravnoteže sila koje djeluju na čvor i** mogu se napisati u sljedećem obliku:

$$P_i^* - \sum_{j=1}^{k_m} \overline{R}_i^{*j} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

$k_m$ - broj štapova vezanih u čvoru i

Analogno ovom uslovu mogu da se **formiraju uslovi ravnoteže svih čvorova sistema štapova**:

$$P^* - R^* = 0$$

gdje su:

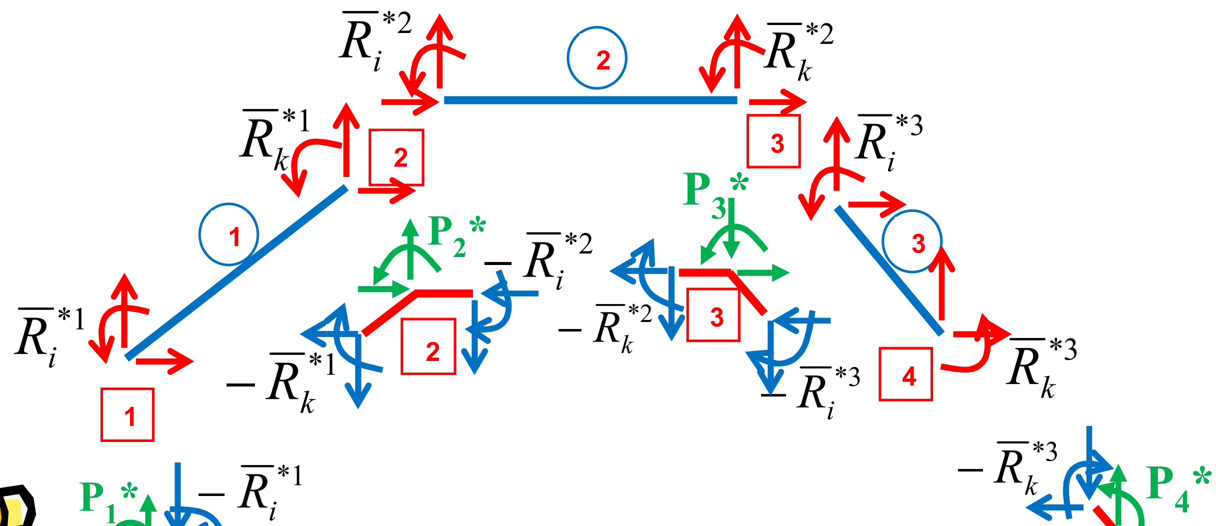
$$P_i^* = \begin{bmatrix} P_1^* \\ \dots \\ P_i^* \\ \dots \\ P_N^* \end{bmatrix} \qquad R_i^* = \begin{bmatrix} R_1^* \\ \dots \\ R_i^* \\ \dots \\ R_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k_1} \overline{R}_1^{*j} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{k_j} \overline{R}_i^{*j} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{k_m} \overline{R}_N^{*j} \end{bmatrix}$$

**N** - broj čvorova sistema

**P*** - vektor zadatih sila (spoljašnjih sila)

**R*** - vektor sila veze u čvorovima sistema koji ima N čvorova.

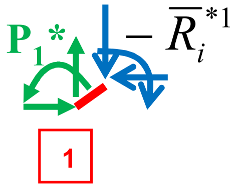
Štapovi i čvorovi sistema koji su razdvojeni dati su na slici:

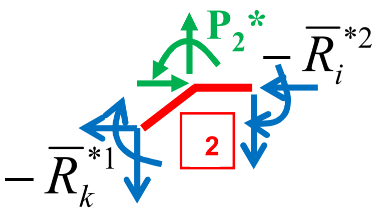



$$P_1^* - \overline{R}_i^{*1} = 0$$

Pored **sila veze na čvorove** djeluju i **zadate koncentrisane sile i momenti**.

Uslovi ravnoteže čvorova od 1 do 4 mogu se napisati u sljedećem obliku:



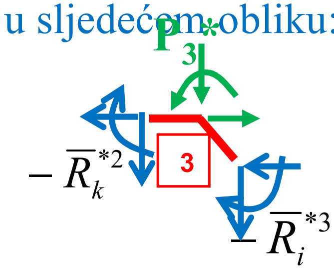



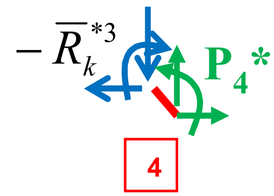

$$P_1^* - \overline{R}_i^{*1} = 0$$

$$P_2^* - \overline{R}_k^{*1} - \overline{R}_i^{*2} = 0$$

$$P_3^* - \overline{R}_k^{*2} - \overline{R}_i^{*3} = 0$$

$$P_4^* - \overline{R}_k^{*3} = 0$$




pri čemu gornji indeks označava štap a donji indeks kraj štapa (i, odnosno, k).

U matričnom obliku ove jednačine glase:

$$\begin{bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \\ P_3^* \\ P_4^* \end{bmatrix} - \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} I & & & & & \\ \hdashline & I & I & & & \\ \hdashline & & & I & I & \\ \hdashline & & & & & I \end{array}\right] \begin{bmatrix} \overline{R}_i^{*1} \\ \overline{R}_k^{*1} \\ \overline{R}_i^{*2} \\ \overline{R}_k^{*2} \\ \overline{R}_i^{*3} \\ \overline{R}_k^{*3} \end{bmatrix} = 0$$

Skraćeni matrični oblik je:

$$P^* - J^T \overline{R}^* = 0$$

**$J^T$** transponovana kinematička matrica

Upoređujući relacije: $P^* - R^* = 0$ $\quad P^* - J^T \overline{R}^* = 0$

$$R^* = J^T \overline{R}^*$$

Veza između vektora $R^*$ i $\overline{R}^*$ analogna je vezi $q^*$ i $\overline{q}^*$

Smjenom **R*** $R^* = J^T \overline{R}^*$ u uslov ravnoteže sistema uz korišćenje relacije $\overline{R}* = \overline{k} * \overline{q} * - \overline{Q} *$

$$P^* - J^T (\overline{k} * \overline{q} * - \overline{Q} *) = 0$$

$$P^* - J^T (\overline{k} * J\, q * - \overline{Q} *) = 0 \quad \Rightarrow \quad k * q * = S *$$

$$P^* - J^T \overline{k} * J\, q * + J^T \overline{Q} * = 0$$

gdje su:

$$k^* = J^T \overline{k} * J \qquad Q^* = J^T \overline{Q} * \qquad S^* = P^* + Q *$$

**k*** matrica krutosti sistema

**S*** vektor slobodnih članova koji se određuje kao zbir zadatih koncentrisanih sila u čvorovima i vektora ekvivalentnog čvornog opterećenja

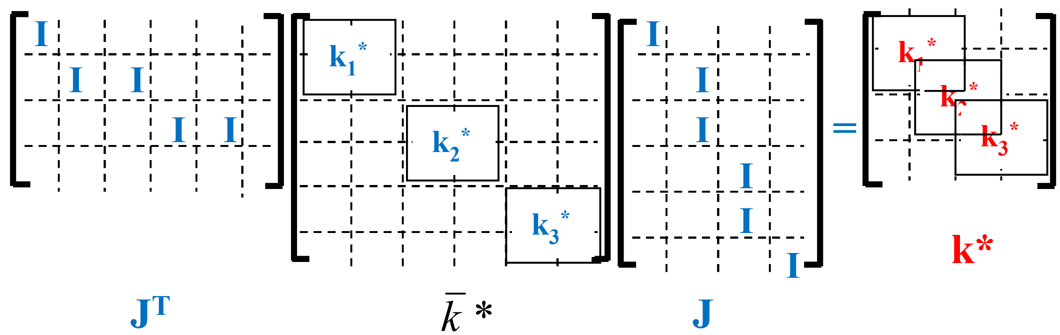
$\overline{k} *$ matrica krutosti sistema nepovezanih štapova

Pošto su elementi matrice **$J^T$ i $J$ nule i jedinice**, za slučaj **kada su lokalni koordinatni sistemu paralelni globalnom koordinatnom sistemu**, proizvod

$$k^* = J^T \bar{k} * J$$

u stvari predstavlja **sažimanje kvazidijagonalne matrice krutosti** $\bar{k}*$

Za primjer dat na slici ***postupak sažimanja*** ima sljedeći oblik:



## *Konturni uslovi i određivanje pomjeranja čvorova i reakcija oslonaca*

Sistem algebarskih jednačina sa nepoznatim komponentama pomjeranja **q* (pomjeranja i obrtanja)** definisan je sa:

$$k^* q^* = S^*$$

**S* predstavlja vektor slobodnih članova.**

**Neposrednim rješavanjem ovog sistema jednačina nije moguće** dobiti rješenja **jer je matrica k***, odnosno **matrica koeficijenata algebarskih jednačina**, **singularna**.

To je stoga što su **u vektoru pomjeranja q* sadržana i pomjeranja sistema kao krute figure u ravni**, tako da **položaj sistema nije definisan**.

Da bi se **odredio položaj sistema potrebno je definisati konturne uslove**, odnosno, uslove oslanjanja sistema.

**Minimalan broj konturnih uslova u ravni je tri**, pošto krut sistem u ravni ima tri stepena slobode kretanja.

Prema tome **u vektoru pomjeranja q* uvijek postoji jedan broj poznatih (zadatih) komponenti pomjeranja** kojima se **definišu *uslovi oslanjanja***.

Na taj način **ukupan broj nepoznatih pomjeranja i obrtanja se smanjuje za broj spriječenih (zadatih) pomjeranja i obrtanja oslonaca**.

**Izvršićemo grupisanje poznatih i nepoznatih pomjeranja u vektoru pomjeranja**, pri čemu ćemo sa $q_n^*$ **označili nepoznata pomjeranja** a sa $q_p^*$ **poznata pomjeranja i obrtanja oslonačkih čvorova.**

**Vektor pomjeranja** dobija sljedeći oblik:

$$q^{*}=\begin{bmatrix} q_n^{*} \\ q_p^{*} \end{bmatrix}$$

**Sistem jednačina K* q*= S*** može se prikazati u sljedećemo obliku**:**

$$\begin{bmatrix} k_{nn}^{*} & k_{np}^{*} \\ k_{pn}^{*} & k_{pp}^{*} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_n^{*} \\ q_p^{*} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_n^{*} \\ S_p^{*} \end{bmatrix}$$

Razvijeni oblik je:

$$k_{nn}^{*}q_n^{*}+k_{np}^{*}q_p^{*}=S_n^{*} \quad \Rightarrow \quad q_n^{*}=k_{nn}^{*-1}(S_n^{*}-k_{np}^{*}q_p^{*})$$

$$k_{pn}^{*}q_n^{*}+k_{pp}^{*}q_p^{*}=S_p^{*} \quad \Rightarrow \quad R_p^{*}=k_{pn}^{*}q_n^{*}+k_{pp}^{*}q_p^{*}-Q_p^{*}$$

reakcije oslonaca uz zadovoljenje relacije:

$$\mathbf{S_p{}^{*}= R_p{}^{*}+ Q_p{}^{*}}$$

**Ovim relacijama određena su pomjeranja čvorova i reakcije oslonaca sistema u zavisnosti od zadatih spoljašnjih uticaja.**

Razlikujemo **dva slučaja konturnih uslova**:

1. **Homogeni konturni uslovi**, **potpuno spriječena pomjeranja ili obrtanja u čvorovima**,
2. **Nehomogeni konturni uslovi**, zadata pomjeranja i obrtanja oslonaca.

**1.** Za **homogene konturne uslove** važi da je $\mathbf{q_p^*=0}$, slijedi:

$$q_n^* = k_{nn}^{*-1}(S_n^* - k_{np}^* q_p^*) \quad \Rightarrow \quad q_n^* = k_{nn}^{*-1} S_n^*$$

$$k_{pn}^* q_n^* + k_{pp}^* q_p^* = S_p^* \quad \Rightarrow \quad R_p^* = k_{pn}^* q_n^* - Q_p^*$$

**2.** Za **nehomogene konturne uslove (zadata pomjeranja postoje)** važi da je $\mathbf{q_p^* \neq 0}$.

Za slučaj kada je samo **zadato pomjeranje oslonca** a **nosač nije opterećen** slijedi da je:

$$q_p^* \neq 0 \qquad Q_p^* = Q_n^* = S_n^* = 0$$

$$q_n^* = k_{nn}^{*-1}(S_n^* - k_{np}^* q_p^*) \quad \Rightarrow \quad q_n^* = -k_{nn}^{*-1} k_{np}^* q_p^*$$

$$k_{pn}^* q_n^* + k_{pp}^* q_p^* = S_p^* \Rightarrow R_p^* = (-k_{pn}^* k_{nn}^{*-1} k_{np}^* + k_{pp}^*) q_p^*$$

$$q_n^* = -k_{nn}^{*-1} k_{np}^* q_p^* = -\hat{k}_{np}^* q_p^*$$

$$R_p^* = (-k_{pn}^* k_{nn}^{*-1} k_{np}^* + k_{pp}^*) q_p^* = \hat{k}_{pp}^* q_p^*$$

gdje su:

$$\hat{k}_{np}^* = k_{nn}^{*-1} k_{np}^*$$

$$\hat{k}_{pp}^* = k_{pp}^* - k_{pn}^* k_{nn}^{*-1} k_{np}^*$$

Kada su **određena pomjeranja čvorova sistema** lako mogu da se **odrede generalisane sile na krajevima**:

$$R_j^* = k_j^* q_j^* - Q_j^*$$

Međutim, u ovom izrazu **generalisane sile su date u globalnom koordinatnom sistemu**, a **pogodniji su izrazi koji definišu sile u lokalnom koordinatnom sistemu** štapa

**Ovo se postiže transformacijom**, pomoću matrice transformacije tako što se prethodna relacija **pomnoži sa lijeve strane sa $T_j$**:

$$T_j R_j^* = T_j k_j^* q_j^* - T_j Q_j^*$$

$$T_j R_j^* = T_j k_j^* q_j^* - T_j Q_j^*$$

$$T_j R_j^* = T_j T_j^T k_j T_j q_j^* - T_j Q_j^*$$

S obzirom da je matrica **T ortogonalna** slijedi:

$$R_j = k_j T_j q_j^* - Q_j$$

$$R_j = k_j q_j - Q_j$$

Ova relacija određuje **generalisane sile na krajevima štapa j u lokalnom koordinatnom** sistema **preko vektora pomjeranja štapa j u globalnom koordinatnom sistemu**.

## *Direktno formiranje jednačina sistema – postupak kodnih brojeva*

Da bi dobili **sistem jednačina K*q*= S*** potrebno je:

1. Odrediti **matrice krutosti $k_j$ i vektore ekvivalentnog opterećenja $Q_j$** svih štapova sistema
2. **Izvršiti tranformaciju** ovih veličina **iz lokalnog u globalni koordinatni sistem**
3. **Formirati matricu krutosti** $\bar{k}^*$, **matricu J i vektor** $\bar{Q}^*$ i izvršiti množenja:

$$Q^* = J^T \bar{Q}^* \qquad\qquad k^* = J^T \bar{k}^* J$$

Ovaj način formiranja jednačina sistema, i ako **je jednostavan i matematički egzaktan**, **nije uvijek racionalan.**

To se posebno odnosi na **sisteme sa velikim brojem štapova** za koje matrice $\bar{k}^*$ i J zauzimaju znatan prostor u memoriji računara, pri tom dolazi do **velikog broja množenja 1 i 0.**

To je razlog za **izbjegavanje formiranja navedenih matrica**.

Pošto su **elementi matrice J nule i jedinice** to **množenje sa ovom matricom dovodi do transformacija kojima se mijenjaju samo položaj pojedinih elemenata matrice** $\bar{k}^*$ **i vektora** $\bar{Q}^*$ **.**

$$R_j^* = k_j^* q_j^* - Q_j^*$$

***j** – oznaka štapa*

***i,k** – krajevi štapa čvorovi*

$$\begin{bmatrix} R_i^{*j} \\ R_k^{*j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii}^{*j} & k_{ik}^{*j} \\ k_{ki}^{*j} & k_{kk}^{*j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i^* \\ q_k^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_i^{*j} \\ Q_k^{*j} \end{bmatrix}$$

Slijedi: $$R_i^{*j} = k_{ii}^{*j} q_i^* + k_{ik}^{*j} q_k^* - Q_i^{*j}$$

Kada se ovaj izraz ubaci u uslov ravnoteže:

$$P_i^* - \sum_{j=1}^{k_i} R_i^{*j} = 0$$

$$P_i^* - \left(\sum_{j=1}^{k_i} k_{ii}^{*j} q_i^* + \sum_{j=1}^{k_i} k_{ik}^{*j} q_k^* - \sum_{j=1}^{k_i} Q_i^{*j}\right) = 0$$

$$k_{ii}^* q_i^* + k_{ik}^* q_k^* = P_i^* + Q_i^*$$

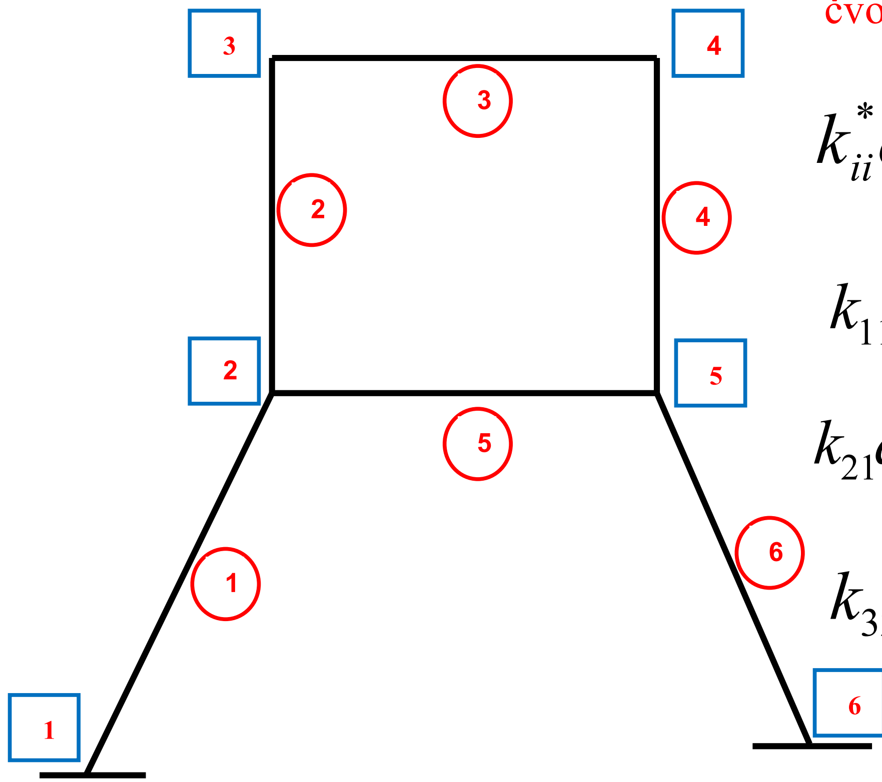
gdje su: $$k_{ii}^* = \sum_{j=1}^{k_i} k_{ii}^{*j} \qquad k_{ik}^* = \sum_{j=1}^{k_i} k_{ik}^{*j} \qquad i \neq k \qquad Q_i^* = \sum_{j=1}^{k_i} Q_i^{*j}$$

Ako se **ova jednačina napiše za sve čvorove sistema** tako da **indeksi i i k na krajevima štapova uzmu oznake odgovarajućih čvorova dobija se sistem jednačina K*q*= S*.**

Dijagonalni blokovi **$k^*_{ii}$ formiraju se kao zbir krutosti $k_{ii}$ svih štapova j vezanih u čvoru i, dok su vandijagonalni elementi** $k^*_{ik}$ matrica krutosti **kojim se vezuju čvor i ,**štapom „j“, **za susedni čvor** „k“ jednaki su $k^*_{ik}$ bloku štapa j.

Na sličan način vektor ekvivalentnog opterećenja u nekom čvoru sistema dobija se kao **zbir vektora ekvivalentnog opterećenja za krajeve svih štapova koji su vezani u tom čvoru**.

**PRIMJER:**




Uslovi ravnoteže čvorova 1-6 ako su svi čvorovi opterećeni su:

$$k_{ii}^{*} q_{i}^{*} + k_{ik}^{*} q_{k}^{*} = P_{i}^{*} + Q_{i}^{*}$$

$$k_{11} q_{1} + k_{12} q_{2} = P_{1} + Q_{1} = S_{1}$$

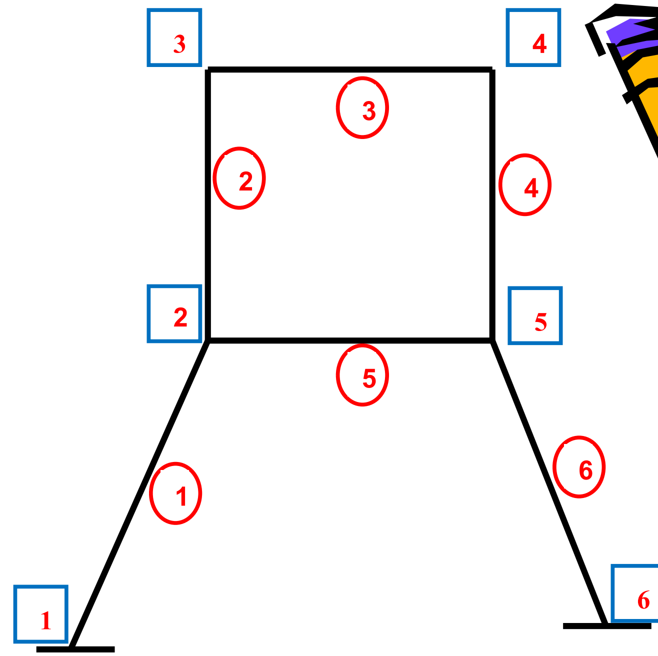
$$k_{21} q_{1} + k_{22} q_{2} + k_{23} q_{3} + k_{25} q_{5} = P_{2} + Q_{2} = S_{2}$$

$$k_{32} q_{2} + k_{33} q_{3} + k_{34} q_{4} = P_{3} + Q_{3} = S_{3}$$

$$k_{43} q_{3} + k_{44} q_{4} + k_{45} q_{5} = P_{4} + Q_{4} = S_{4}$$

$$k_{52} q_{2} + k_{56} q_{6} + k_{55} q_{5} + k_{54} q_{4} = P_{5} + Q_{5} = S_{5}$$

$$k_{65} q_{5} + k_{66} q_{6} = P_{6} + Q_{6} = S_{6}$$




Matrični oblik ovih jednačina je:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & & & & \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & & k_{25} & \\ & k_{32} & k_{33} & k_{34} & & \\ & & k_{43} & k_{44} & k_{45} & \\ & k_{52} & & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ & & & & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix}$$

gdje su: $k_{ii}^{*} = \sum_{j=1}^{k_i} k_{ii}^{*j}$

$$k_{11} = k_{11}^{1}$$
$$k_{22} = k_{22}^{1} + k_{22}^{2} + k_{22}^{5}$$
$$k_{33} = k_{33}^{2} + k_{33}^{3}$$
$$k_{44} = k_{44}^{3} + k_{44}^{4}$$
$$k_{55} = k_{55}^{4} + k_{55}^{5} + k_{55}^{6}$$
$$k_{66} = k_{66}^{6}$$

$$k_{ik}^{*} = \sum_{j=1}^{k_i} k_{ik}^{*j} \qquad i \neq k$$

$$k_{12} = k_{21} = k_{12}^{1} \qquad k_{23} = k_{32} = k_{23}^{2} \qquad k_{34} = k_{43} = k_{34}^{3}$$
$$k_{45} = k_{54} = k_{45}^{4} \qquad k_{25} = k_{52} = k_{25}^{5} \qquad k_{56} = k_{65} = k_{56}^{6}$$

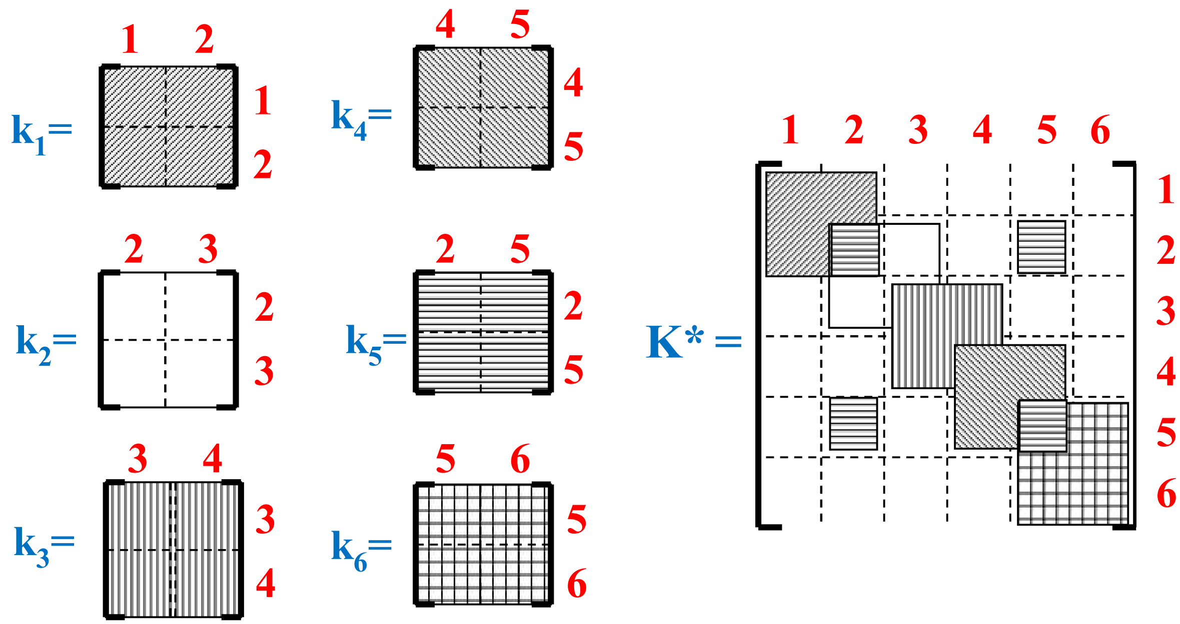
$$Q_i^{*} = \sum_{j=1}^{k_i} Q_i^{*j}$$

$$Q_1 = Q_1^1 \qquad Q_2 = Q_2^1 + Q_2^2 + Q_2^5 \qquad Q_3 = Q_3^2 + Q_3^3$$
$$Q_4 = Q_4^3 + Q_4^4 \qquad Q_5 = Q_5^4 + Q_5^5 + Q_5^6 \qquad Q_6 = Q_6^6$$

U navedenim izrazima **nijesu pisane oznake *** zbog pojednostavljenja.

Sve veličine su definisane u **globalnom koordinatnom sistemu**.

Šematski prikaz **direktnog formiranja matrice krutosti** dat je na




| štap | kraj | |
|---|---|---|
| | i | k |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 5 |
| 5 | 2 | 5 |
| 6 | 5 | 6 |

**Matrica krutosti sistema** se dobija tako što se **blokovi matrica krutosti pojedinih štapova unose u kvadratnu nula matricu na poziciji koja je određena njihovim kodnim brojem**.

Ako se **na istoj poziciji nađu blokovi matrica** dva ili više štapova **oni se sabiraju**.

Ovaj način formiranja poznat je pod nazivom ***postupak kodnih brojeva***.

Uobičajeno je da se **ovaj postupak umjesto na blokove primjenjuje na elemente matrice krutosti**.

Tada se vrše **obeležavanja (kodiranja) svih vrsta i kolona matrice krutosti štapova u skladu sa oznakama generalisanih pomjeranja** (sile) **u čvorovima sistema**.

**Postupak ima sljedeće korake:**

1) Odrede se **matrice krutosti štapova i izvrši njihova transformacija u odnosu na globalni koordinatni sistem**,

2) **Izvrši se numerisanje (kodiranje) vrsta i kolona matrica štapova prema globalnim koordinatama** (stepenima slobode čvorova, svaki element ima dva indeksa pomoću kojih se određuje položaj elementa u matrici krutosti sistema),

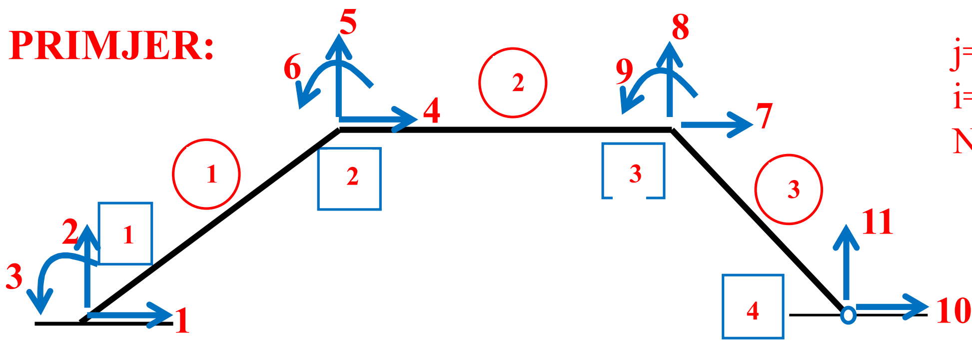
3) **Formira se nula kvadratna matrica reda n**, gdje je n ukupan broj stepeni slobode sistem, vrste odgovaraju generalisanim silama a kolone generalisanim pomjeranjima čvorova sistema,

4) U ovu matricu se **unose elementi matrice krutosti pojedinih štapova na pozicije koje odgovaraju njihovim oznakama**. Kada se na istoj poziciji nađu elementi matrica dva ili više štapova oni se sabiraju.

**Na sličan način se formira i vektor ekvivalentnog opterećenja Q*.**

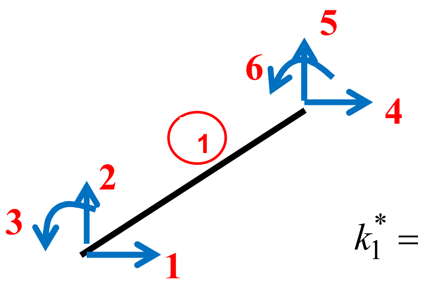
Ilustracija ovog postupka biće data na sljedećem primjeru.

**PRIMJER:**

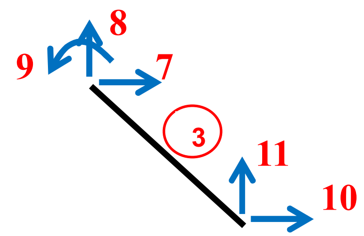



j=1,2,3
i=1,2,3,4
N = 3x3+1x2 =
= 9+2 = 11

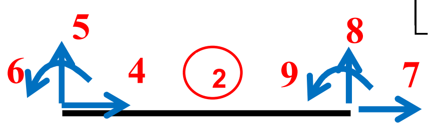
| štap | Kraj | |
|---|---|---|
| | i | k |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 4 |




$$k_1^* = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} o & & & o & & \\ & o & o & & o & o \\ & o & o & & o & o \\ o & & & o & & \\ & o & o & & o & o \\ & o & o & & o & o \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{array} \qquad Q_1^* = \begin{bmatrix} o \\ o \\ o \\ o \\ o \\ o \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$




$$k_3^* = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \times & & & \times & \\ & \times & \times & & \times \\ & \times & \times & & \times \\ \times & & & \times & \\ & \times & \times & & \times \end{bmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix} \end{array} \qquad Q_3^* = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$




$$k_2^* = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \bullet & & & \bullet & & \\ & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & & & \bullet & & \\ & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{array} \qquad Q_2^* = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

$$
k_1^* = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline
 & o & & & o & & & 1 \\
 & & o & o & & o & o & 2 \\
 & & o & o & & o & o & 3 \\
 & o & & & o & & & 4 \\
 & & o & o & & o & o & 5 \\
 & & o & o & & o & o & 6
\end{array}
\qquad
Q_1^* = \begin{array}{c|c|c}
 & o & 1 \\
 & o & 2 \\
 & o & 3 \\
 & o & 4 \\
 & o & 5 \\
 & o & 6
\end{array}
$$

$$
k_2^* = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ \hline
 & \bullet & & & \bullet & & & 4 \\
 & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & 5 \\
 & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & 6 \\
 & \bullet & & & \bullet & & & 7 \\
 & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & 8 \\
 & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & 9
\end{array}
\qquad
Q_2^* = \begin{array}{c|c|c}
 & \bullet & 4 \\
 & \bullet & 5 \\
 & \bullet & 6 \\
 & \bullet & 7 \\
 & \bullet & 8 \\
 & \bullet & 9
\end{array}
$$

$$
k_3^* = \begin{array}{c|ccccc|c}
 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \\ \hline
 & \times & & & \times & & 7 \\
 & & \times & \times & & \times & 8 \\
 & & \times & \times & & \times & 9 \\
 & \times & & & \times & & 10 \\
 & & \times & \times & & \times & 11
\end{array}
\qquad
Q_3^* = \begin{array}{c|c|c}
 & \times & 7 \\
 & \times & 8 \\
 & \times & 9 \\
 & \times & 10 \\
 & \times & 11
\end{array}
$$

$$
k^* = \begin{array}{c|ccccccccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \\ \hline
 & o & & & o & & & & & & & & 1 \\
 & & o & o & & o & o & & & & & & 2 \\
 & & o & o & & o & o & & & & & & 3 \\
 & o & & & o\bullet & & & \bullet & & & & & 4 \\
 & & o & o & & o\bullet & o\bullet & & \bullet & \bullet & & & 5 \\
 & & o & o & & o\bullet & o\bullet & & \bullet & \bullet & & & 6 \\
 & & & & \bullet & & & \bullet\times & & & \times & & 7 \\
 & & & & & \bullet & \bullet & & \bullet\times & \bullet\times & & \times & 8 \\
 & & & & & \bullet & \bullet & & \bullet\times & \bullet\times & & \times & 9 \\
 & & & & & & & \times & & & \times & & 10 \\
 & & & & & & & & \times & \times & & \times & 11
\end{array}
\qquad
Q^* = \begin{array}{c|c|c}
 & o & 1 \\
 & o & 2 \\
 & o & 3 \\
 & o\bullet & 4 \\
 & o\bullet & 5 \\
 & o\bullet & 6 \\
 & \bullet\times & 7 \\
 & \bullet\times & 8 \\
 & \bullet\times & 9 \\
 & \times & 10 \\
 & \times & 11
\end{array}
$$

## *Struktura matrice krutosti*

Matrica krutosti sistema je **kvadratna matrica** čiji je **red jednak ukupnom broju stepeni slobode sistema**.

Takođe, matrica krutosti je **simetrična i singularna**.

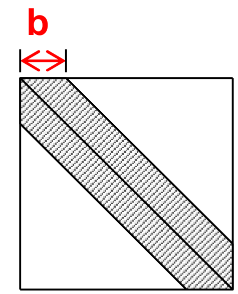
Simetričnost je **posledica stava o uzajamnosti uticaja**, a **singularitet je posledica toga što su u generalisanim pomjeranjima čvorova sadržava i pomjeranja sistema kao krute figure** u ravni.

Znatan broj elemenata matrice krutosti je jednak nuli, dok su **elementi koji su različiti od nule grupisani oko glavne dijagonale u obliku trake**.

**Trakast oblik matrice krutosti sistema** nastaje kao posledica toga što se **u jednom čvoru vezuje znatno manje elemenata od ukupnog broja elemenata sistema i što jedan štap (element) može da povezuje samo dva čvora**.

**Širina trake zavisi od broja stepeni slobode u čvorovima** i od **razlike između oznaka čvorova na krajevima štapova:**

$$b=(m+1)s$$




**s – broj stepeni slobode u čvoru**

**m – razlika između oznaka čvorova na krajevima štapa**

**b – širina trake**

**Širina trake** utiče na **brzinu i efikasnost rješavanja sistema jednačina** tako da je njena minimizacioja od praktičnog značaja.

Za primjer dat na slici širina trake je **b= (3+1) s=4s**.